Corrigé du Devoir Surveillé 8
Applications linéaires, dénombrement, probabilités

Problème I - Applications linéaires

Soit E un espace vectoriel. On s'intéresse dans ce problème aux applications linéaires vérifiant l'équation

$$f^2 = 2f. \qquad (\bigstar)$$

Partie 1 : Un exemple dans $\mathbb{R}^3$

On considère dans cette partie l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} x-y \\ -x+y \\ 2x+2y+2z \end{bmatrix} \end{array}$$

On pose $F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y=0 \right\}$.

1. On s'échauffe.

   - $F \subseteq \mathbb{R}^3$ par définition.
   - Si $u = 0_{\mathbb{R}^3}$, alors $x=y=z=0_{\mathbb{R}}$ et donc $x+y=0$. Donc $0_{\mathbb{R}^3} \in F$.
   - Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $u=(x,y,z) \in F$ et $v=(x',y',z') \in F$. Alors $x+y=0$ et $x'+y'=0$. Posons $w = \lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda x'' + \mu z'')$. On observe alors que

     $$\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' = \lambda \underbrace{(x+y)}_{=0 \text{ car } u \in F} + \mu \underbrace{(x'+y')}_{=0 \text{ car } v \in F} = 0.$$

     Donc $w = \lambda u + \mu v \in F$ et F est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion,

   $$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3 \text{ et donc est un espace vectoriel.}}$$

   De plus, on a les égalités suivantes :

   $$\begin{aligned} F &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y=0 \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y=-x \right\} \\ &= \left\{ (x,-x,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \operatorname{Vect} \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)}_{=\mathscr{B}_F}. \end{aligned}$$

   NB : on pouvait directement écrire F comme espace engendré et en déduire que F est un espace vectoriel.

La famille $\mathscr{B}_F$ engendre F de plus, elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires. Donc $\mathscr{B}_F$ est libre. Donc

$$\boxed{\mathscr{B}_F \text{ est une base de } F}$$

Enfin, on en déduit que

$$\boxed{\dim(F) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_F) = 2.}$$

2. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\left(u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}\right) \in \left(\mathbb{R}^3\right)^2$. Posons $w = \lambda\, u + \mu v = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$. On a

$$w = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, x + \mu x' \\ \lambda\, y + \mu y' \\ \lambda\, z + \mu z' \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a les égalités dans $\mathbb{R}^3$ suivantes :

$$\begin{aligned} f(\lambda\, u + \mu v) = f(w) &= \begin{bmatrix} x'' - y'' \\ -x'' + y'' \\ 2x'' + 2y'' + 2z'' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda\, x + \mu x' - (\lambda\, y + \mu y') \\ -(\lambda\, x + \mu x') + \lambda\, y + \mu y' \\ 2(\lambda\, x + \mu x') + 2(\lambda\, y + \mu y') + 2(\lambda\, z + \mu z') \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} x - y \\ -x + y \\ 2x + 2y + 2z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} x' - y' \\ -x' + y' \\ 2x' + 2y' + 2z' \end{bmatrix} \\ &= \lambda\, f(u) + \mu f(v). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{l'application } f \text{ est linéaire.}}$$

3. Soit $u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcll}
u \in \mathrm{Ker}\,(f) & \Leftrightarrow & f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} & \\
& \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} x-y \\ -x+y \\ 2x+2y+2z \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} & \\
& \Leftrightarrow & \begin{cases} x-y=0 \\ -x+y=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases} & \\
& \Leftrightarrow & \begin{cases} x-y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} & \begin{array}{c} \text{car } L_1 = -L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \end{array} \\
& \Leftrightarrow & \begin{cases} x-y=0 \\ 2y+z=0 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
& \Leftrightarrow & \begin{cases} x=y \\ z=-2y \end{cases} & \\
& \Leftrightarrow & u = \begin{cases} y \\ y \\ -2y \end{cases} . &
\end{array}$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right)}_{=\mathscr{B}_K}}$$

Puisque $\mathscr{B}_K$ engendre $\mathrm{Ker}\,(f)$ et que $\mathscr{B}_K$ est libre car constituée d'un seul vecteur non nul, on en déduit que $\mathscr{B}_K$ est une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et donc $\dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_K) = 1$.

4. Par la question précédente, $\mathrm{Ker}\,(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Donc f n'est pas injective donc n'est pas bijective. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ n'est pas un automorphisme.}}$$

5. Puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie, par le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}\,(f) + \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right).$$

Par la question précédente,

$$\mathrm{rg}\,(f) + 1 = 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = \mathrm{rg}\,(f) = 2.}$$

6. Puisque $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ forme une base de $\mathbb{R}^3$, par linéarité de f,

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(f((1,0,0)), f((0,1,0)), f((0,0,1))) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right).$$

Puisque l'on sait que $\mathrm{Im}\,(f)$ est de dimension 2, il suffit de prendre deux vecteurs non colinéaires pour obtenir une base de $\mathrm{Im}\,(f)$. Par exemple,

$$\boxed{\mathscr{B}_I = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{Im}\,(f).}$$

7. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc par la question précédente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(f) &= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_2 \leftarrow \frac{C_2+C_1}{4}\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) && C_1 \leftarrow C_1 - 2C_2.
\end{aligned}$$

On reconnaît la base $\mathscr{B}_F$ de F. Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(f) = F.}$$

8. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On calcule :

$$\begin{aligned}
f^2(u) = f\circ f(u) = f\left(\begin{bmatrix}x-y\\-x+y\\2x+2y+2z\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix}(x-y)-(-x+y)\\-(x-y)+(-x+y)\\2\,(x-y)+2\,(-x+y)+2\,(2x+2y+2z)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}2x-2y\\-2x+2y\\4x+4y+4z\end{bmatrix}\\
&= 2\begin{bmatrix}x-y\\-x+y\\2x+2y+2z\end{bmatrix} = 2f\,(u)\,.
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $u\in\mathbb{R}^3$, on conclut que

$$\boxed{f^2 = 2f \qquad (\bigstar)}$$

9. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: « $f^n = 2^{n-1}f$ ».

Initialisation. Si $n=1$, alors $2^{n-1}f = 2^0 f = f = f^1$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathscr{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned}
f^{n+1} = f^n\circ f &= 2^{n-1}f\circ f && \text{par hypothèse de récurrence}\\
&= 2^{n-1}f^2\\
&= 2^{n-1}\times 2f && \text{par la question précédente}\\
&= 2^n f.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, \qquad f^n = 2^{n-1}f.}$$

Partie 2 : Etude générale

On suppose à nouveau E quelconque.

10. Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$ un automorphisme de E vérifiant ($\bigstar$). Alors $f^2 = 2f$ et f^{-1} existe. En composant par f^{-1}, on obtient
$$f = 2\mathrm{Id}_E.$$
Réciproquement, si $f = 2\mathrm{Id}_E$, alors $f \in \mathrm{GL}(E)$ ($f^{-1} = \frac{1}{2}\mathrm{Id}_E$) et $f^2 = 4\mathrm{Id}_E = 2f$. Conclusion, il existe un unique automorphisme vérifiant ($\bigstar$) donné par
$$\boxed{f = 2\mathrm{Id}_E.}$$

11. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur de E vérifiant ($\bigstar$). Alors $p^2 = p$ et $p^2 = 2p$. Nécessairement, $p = 2p$ et $p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. L'application nulle est bien un projecteur vérifiant ($\bigstar$). Conclusion,
$$\boxed{p \text{ projecteur vérifiant } (\bigstar) \qquad \Leftrightarrow \qquad p = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

On fixe f et g deux endomorphismes de E vérifiant ($\bigstar$).

12. Soit $x \in \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E)$. Il existe $a \in E$ tel que $x = (f - 2\mathrm{Id}_E)(a) = f(a) - 2a$. Montrons que $x \in \mathrm{Ker}(f)$. On a
$$\begin{aligned} f(x) = f(f(a) - 2a) &= f^2(a) - 2f(a) && \text{par linéarité de } f \\ &= 2f(a) - 2f(a) && \text{car } f^2 = 2f \\ &= 0_E. \end{aligned}$$
Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E)$, on conclut que
$$\boxed{\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Ker}(f).}$$

13. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$. Dès lors $f(x) - 2x = 0_E$ i.e. $f(x) = 2x$ ou encore
$$x = \frac{1}{2}f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \text{par linéarité.}$$
Notamment $x \in \mathrm{Im}(f)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$, on conclut que
$$\boxed{\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Im}(f).}$$

14. On suppose dans cette question uniquement que E est de dimension finie. Par la question 12.
$$\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) \subseteq \mathrm{Ker}(f) \qquad (i).$$
Montrons l'égalité des dimensions. On a déjà par (i) que $\mathrm{rg}(f - 2\mathrm{Id}_E) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f))$. De plus, par la question précédente,
$$\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)) \leqslant \mathrm{rg}(f).$$
Or par le théorème du rang CAR E est de dimension finie, on a d'une part que $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et d'autre part que $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$. Ainsi,
$$\begin{aligned} \dim(E) - \mathrm{rg}(f - 2\mathrm{Id}_E) \leqslant \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) \quad &\Leftrightarrow \quad -\mathrm{rg}(f - 2\mathrm{Id}_E) \leqslant -\dim(\mathrm{Ker}(f)) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(f - 2\mathrm{Id}_E) \geqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)). \end{aligned}$$
Comme nous avions déjà l'inégalité inverse, on en déduit que
$$\mathrm{rg}(f - 2\mathrm{Id}_E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) \qquad (ii)$$
Par (i) et (ii), on conclut que
$$\boxed{\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Ker}(f).}$$

15. Montrons que $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{0_E\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f)$. Alors,

$$\begin{cases} x \in \mathrm{Ker}\,(f) \\ x \in \mathrm{Im}\,(f) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = 0_E \\ \exists a \in E,\ x = f(a) \end{cases}.$$

En particulier,

$$0_E = f(x) = f\left(f(a)\right) = f^2(a) = 2f(a) \qquad \text{par } (\bigstar).$$

Donc $f(a) = 0_E$. Ainsi, $x = f(a) = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) \subseteq \{0_E\}$. Or on a aussi $\{0_E\} \subseteq \mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f)$ en tant qu'intersection d'espaces vectoriels. Donc $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \{0_E\}$ i.e.

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) \text{ et } \mathrm{Im}\,(f) \text{ sont en somme directe.}}$$

16. On suppose dans cette question uniquement que E est de dimension finie. Donc par le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(f) + \dim\left(\mathrm{Ker}\,(f)\right) = \dim\left(E\right).$$

Or par la question précédente, $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont en somme directe. Donc par caractérisation des espaces supplémentaires par la dimension, on en déduit que $\mathrm{Ker}\,(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = E$:

$$\boxed{\text{On en déduit que les espaces } \mathrm{Ker}\,(f) \text{ et } \mathrm{Im}\,(f) \text{ sont supplémentaires.}}$$

17. Soient $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}\,(f) \times \mathrm{Im}\,(f)$. Posons $x = x_1 + x_2$. Puisque $x_1 \in \mathrm{Ker}\,(f)$, alors $f(x_1) = 0_E$. D'autre part, $x_2 \in \mathrm{Im}\,(f)$ donc il existe $a \in E$ tel que $x_2 = f(a)$. Par suite,

$$f(x) = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = 0_E + f\left(f(a)\right) = f^2(a) \overset{\text{par } (\bigstar)}{=} 2f(a) = 2x_2.$$

D'où $x_2 = \frac{1}{2}f(x)$. Puis, $x_1 = x - x_2 = x - \frac{1}{2}f(x)$. Conclusion,

$$\boxed{x_2 = \frac{1}{2}f(x) \text{ et } x_1 = x - \frac{1}{2}f(x).}$$

18. On sait déjà que $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont en somme directe. Montrons que $E = \mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Im}\,(f)$. On effectue la synthèse de la question précédente. Soit $x \in E$. Posons $x_1 = x - \frac{1}{2}f(x)$ et $x_2 = \frac{1}{2}f(x)$. On observe les points suivants.

- $x_1 + x_2 = x - \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) = x$.
- De plus,

$$f(x_1) = f\left(x - \frac{1}{2}f(x)\right) = f(x) - \frac{1}{2}f^2(x) = f(x) - f(x) = 0_E.$$

  Donc $x_1 \in \mathrm{Ker}\,(f)$.
- Puisque $x_2 = \frac{1}{2}f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$, on en déduit que $x_2 \in \mathrm{Im}\,(f)$.

Donc $x = x_1 + x_2 \in \mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Im}\,(f)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on obtient que $E \subseteq \mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Im}\,(f)$. Or $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de E donc $\mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Im}\,(f) \subseteq E$. Ainsi,

$$E = \mathrm{Ker}\,(f) + \mathrm{Im}\,(f).$$

Puisque les espaces sont en somme directe, on conclut que

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) \text{ et } \mathrm{Im}\,(f) \text{ sont supplémentaires.}}$$

Soit $g \in \mathscr{L}(E)$.

19. On suppose que $f \circ g + g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

(a) En composant par f à gauche, on obtient que

$$f \circ (f \circ g + g \circ f) = f \circ 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \Leftrightarrow \quad f^2 \circ g + f \circ g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \qquad \text{par linéarité de } f.$$

Par ($\bigstar$),

$$2f \circ g + f \circ g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

On compose ensuite par f à droite,

$$\begin{aligned} & (2f \circ g + f \circ g \circ f) \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \circ f \\ \Leftrightarrow \quad & 2f \circ g \circ f + f \circ g \circ f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \\ \Leftrightarrow \quad & 2f \circ g \circ f + f \circ g \circ (2f) = 0_{\mathscr{L}(E)} && \text{par } (\bigstar) \\ \Leftrightarrow \quad & 2f \circ g \circ f + 2f \circ g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} && \text{par linéarité de } f \text{ et } g \\ \Leftrightarrow \quad & 4f \circ g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \\ \Leftrightarrow \quad & f \circ g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f \circ g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

(b) Nous avions obtenu dans la question précédente que $2f \circ g + f \circ g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Donc conjugué à $f \circ g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on trouve que

$$2f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \Leftrightarrow \quad f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Finalement, comme $f \circ g + g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on a aussi $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Conclusion,

$$\boxed{f \circ g = g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

20. On suppose que g vérifie ($\bigstar$). On a

$$(f+g)^2 = f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2.$$

Puisque f et g vérifie ($\bigstar$),

$$(f+g)^2 = 2f + f \circ g + g \circ f + 2g.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} f + g \text{ vérifie } (\bigstar) \quad & \Leftrightarrow \quad 2f + f \circ g + g \circ f + 2g = 2(f+g) \\ & \Leftrightarrow \quad f \circ g + g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}. \end{aligned}$$

Donc par la question précédente, $f \circ g = g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Réciproquement si $f \circ g = g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$ alors $f \circ g + g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Conclusion,

$$\boxed{f + g \text{ est solution de } (\bigstar) \quad \Leftrightarrow \quad f \circ g = g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

Partie 3 : En dimension infinie

On considère $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $e_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{2kx} \end{array}$ et on définit φ_k pour tout $f \in E$ par

$$\varphi_k(f) = \frac{f'(0)}{k} e_k.$$

21. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\varphi_k \in \mathscr{L}(E)$.

- Si $f \in E$, alors f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donc $f'(0)$ existe. La fonction exponentielle étant $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on a notamment $e_k \in E$. Donc $\varphi_k(f) = \frac{f'(0)}{k} e_k \in E$. Donc φ_k est une application bien définie sur E et à valeurs dans E.
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(f, g) \in E^2$. Posons $h = \lambda f + \mu g$. Alors

$$\begin{aligned}\varphi_k(\lambda f + \mu g) &= \varphi_k(h) \\ &= \frac{h'(0)}{k} e_k \\ &= \frac{\lambda f'(0) + \mu g'(0)}{k} e_k \\ &= \lambda \frac{f'(0)}{k} e_k + \mu \frac{g'(0)}{k} e_k \\ &= \lambda \varphi_k(f) + \mu \varphi_k(g).\end{aligned}$$

Donc φ_k est linéaire.

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_k \in \mathscr{L}(E).}$$

22. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $f \in E$, on a

$$\varphi_k^2(f) = \varphi_k\left(\frac{f'(0)}{k} e_k\right) = \frac{f'(0)}{k} \varphi_k(e_k) = \frac{f'(0)}{k} \frac{e_k'(0)}{k} e_k = \frac{f'(0)}{k} \frac{2k\,\mathrm{e}^{2k\times 0}}{k} e_k = 2\frac{f'(0)}{k} e_k = 2\varphi_k(f).$$

Ceci étant vrai pour tout $f \in E$, on en déduit que $\varphi_k^2 = \varphi_k$ i.e.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_k \text{ vérifie } (\bigstar).}$$

23. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $F_k = \mathrm{Im}(\varphi_k)$ et $G = \mathrm{Ker}(\varphi_k)$. Soit $f \in F_k$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda e_k$. On cherche $g \in E$ tel que $f = \varphi_k(g) = \frac{g'(0)}{k} e_k$. Il suffirait d'avoir $\lambda = \frac{g'(0)}{k}$ ou encore $g'(0) = \lambda k$. Posons $g : x \mapsto \lambda k x$ i.e. $g = \lambda k \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Alors on a $g \in E$ et

$$\varphi_k(g) = \frac{g'(0)}{k} e_k = \frac{\lambda k}{k} e_k = \lambda e_k = f.$$

Donc $f \in \mathrm{Im}(\varphi_k)$ et donc $F_k \subseteq \mathrm{Im}(\varphi_k)$. Réciproquement, soit $f \in \mathrm{Im}(\varphi_k)$. Il existe $g \in E$ tel que $f = \varphi_k(g) = \underbrace{\frac{g'(0)}{k}}_{\in\mathbb{R}} e_k$. Donc $f \in \mathrm{Vect}(e_k) = F_k$, ceci étant vrai pour tout $f \in \mathrm{Im}(\varphi_k)$, on en déduit aussi que $\mathrm{Im}(\varphi_k) \subseteq F_k$. Ainsi,

$$F_k = \mathrm{Im}(\varphi_k).$$

Soit $f \in E$. On a

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{Ker}(\varphi_k) \quad &\Leftrightarrow \quad \varphi_k(f) = 0_E \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{f'(0)}{k} e_k = 0_E = 0_{\mathscr{C}^1(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{f'(0)}{k}\,\mathrm{e}^{2kx} = 0_{\mathbb{R}} \\ &\Leftrightarrow \quad f'(0) = 0 \qquad \text{car } \frac{\mathrm{e}^{2kx}}{k} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f \in G.\end{aligned}$$

Donc $G = \operatorname{Ker}(\varphi_k)$.

On note que les φ_k ont toutes le même noyau mais des images différents.

Puisque φ_k vérifie (★) par la question 18. on en déduit que $\operatorname{Ker}(\varphi_k) \oplus \operatorname{Im}(\varphi_k) = E$. Or $F_k = \operatorname{Im}(\varphi_k)$ et $G = \operatorname{Ker}(\varphi_k)$. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad F_k \oplus G = E.}$$

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On pose $E_n = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, $G_n = \{ f \in E_n \mid f'(0) = 0 \}$ et ψ la restriction de φ_1 à E_n. On admet que $\psi \in \mathscr{L}(E_n)$.

24. Par définition, $\mathscr{C}_n$ engendre E_n. Montrons que $\mathscr{C}_n$ est libre. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, e_k = 0_{\mathscr{C}^1(\mathbb{R})} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, e^{2kx} = 0.$$

Posons $r = e^x$. Quand x décrit $\mathbb{R}$, r décrit $\mathbb{R}_+^*$. Donc

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, r^{2k} = 0.$$

Posons $P = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, X^{2k}$. On observe que P est un polynôme et $\forall r \in \mathbb{R}_+^*$, $P(r) = 0$. Donc P possède une infinité de racines et donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Par unicité des coefficients du polynôme nul,

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \qquad \lambda_k = 0.$$

Donc $\mathscr{C}_n$ est libre. Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{C}_n = (e_1, \dots, e_n) \text{ est une base de } E_n.}$$

Notamment,

$$\dim(E_n) = \operatorname{Card}(\mathscr{C}_n) = n.$$

25. Montrons que $\mathscr{B}_n$ est une famille libre de E_n. Soit $(\lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que

$$\sum_{k=2}^{n} \lambda_k \left(e_1 - \frac{e_k}{k} \right) = 0_{E_n}.$$

Alors,

$$\left(\sum_{k=2}^{n} \lambda_k \right) e_1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{\lambda_k}{k} e_k = 0_{E_n}.$$

Posons $\mu_1 = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k$ et pour tout $k \in [\![2; n]\!]$, $\mu_k = -\frac{\lambda_k}{k}$. Alors,

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k = 0_{E_n}.$$

Or $\mathscr{C}_n$ est libre. Donc pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, $\mu_k = 0_{\mathbb{R}}$. En particulier, pour tout $k \in [\![2; n]\!]$, $-\frac{\lambda_k}{k} = 0 \Leftrightarrow \lambda_k = 0$. D'où,

$$\mathscr{B}_n \text{ est libre.}$$

Montrons que $\mathscr{B}_n$ est une famille de G_n. Soit $k \in [\![2; n]\!]$. Naturellement $e_1 - \frac{e_k}{k} \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E_n$. De plus,

$$\left(e_1 - \frac{e_k}{k} \right)'(0) = 2\, e^{2 \times 0} - \frac{2k\, e^{2k \times 0}}{k} = 2 - 2 = 0.$$

Donc pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, $e_1 - \frac{e_k}{k} \in G_n$. Ainsi $\mathscr{B}_n$ est une famille libre de G_n. On montre aisément que G_n est un sous-espace vectoriel de E_n. Par ce qui précède, on a en particulier,

$$\dim(G_n) \geqslant \operatorname{Card}(\mathscr{B}_n) = n-1.$$

Supposons $\dim(G_n) = n$. Puisque $G_n \subseteq E_n$ et que $\dim(E_n) = n = \dim(G_n)$, dans ce cas, on en déduit que $E_n = G_n$. En particulier $e_1 \in E_n$ donc $e_1 \in G_n$ i.e.

$$0 = e_1'(0) = 2 \qquad \text{impossible.}$$

Donc $\dim(G_n) \leqslant n-1$. Ainsi, $\dim(G_n) = n-1 = \operatorname{Card}(\mathscr{B}_n)$. De plus $\mathscr{B}_n$ est libre. Conclusion, par caractérisation des bases par la dimension,

$$\boxed{\mathscr{B}_n = \left(e_1 - \frac{e_2}{2}, e_1 - \frac{e_3}{3}, \dots, e_1 - \frac{e_n}{n}\right) \text{ est une base de } G_n.}$$

26. Dans E, on observe que $G_n \subseteq G$. Donc $F_1 \cap G_n \subseteq F_1 \cap G = \{0_E\}$ par la question 23. Donc $F_1 \cap G_n = \{0_E\}$. Donc F_1 et G_n sont en somme directe. De plus,

$$F_1 = \operatorname{Vect}(e_1)$$

La famille (e_1) engendre F_1 est est libre car $e_1 \neq 0$. Donc (e_1) est une base de F_1 et $\dim(F_1) = 1$. Or $\dim(G_n) = n-1$ par la question précédente. Donc

$$\dim(F_1) + \dim(G_n) = n = \dim(E_n).$$

Sachant que ces espaces sont en somme directe, on en déduit que

$$\boxed{F_1 \oplus G_n = E_n.}$$

Posons $\mathscr{A}_n = (e_1, \mathscr{B}_n)$. La famille (e_1) est une base de F_1 et $\mathscr{B}_n$ une base de G_n. Donc par le théorème de la base adaptée, $\mathscr{A}_n$ est une base de E_n. De plus, si $u = e_1$

$$\psi(u) = \varphi_1(e_1) = \frac{2}{1}e_1 = 2e_1 = 2u.$$

Donc $(u, \psi(u))$ est liée.

Si $u \in \mathscr{B}_n$, il existe $k \in [\![2;n]\!]$ tel que $u = e_1 - \frac{e_k}{k}$. Donc

$$\psi(u) = \varphi_1\left(e_1 - \frac{e_k}{k}\right) = \varphi_1(e_1) - \frac{1}{k}\varphi_1(e_k) = 2e_1 - \frac{1}{k}\frac{2k}{1}e_1 = 2e_1 - 2e_1 = 0.$$

Donc $(u, \psi(u))$ est liée. Conclusion, dans tous les cas,

$$\boxed{\mathscr{A}_n = (e_1, \mathscr{B}_n) \text{ est une base de } E_n \text{ telle que } (u, \psi(u)) \text{ est liée.}}$$

Problème II - Probabilités

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On possède deux urnes : l'urne A et l'urne B ainsi que $2n$ boules : n rouges et n vertes.

Partie 1 : Dénombrement

On choisit n boules que l'on met dans l'urne A et les n autres boules restantes vont dans l'urne B.

1. On suppose dans cette question que les boules de même couleur sont indiscernables. Remplir l'urne A consiste à choisir le nombre de boules de couleur verte (les autres étant alors de couleur rouge). On peut remplir l'urne uniquement de boules vertes ou d'une seule boule verte ou de deux etc jusqu'à n boules vertes. Donc au total

$$\boxed{n+1 \text{ remplissage de l'urne } A \text{ sont possibles.}}$$

On suppose dans la suite toutes les boules discernables, les vertes étant numérotées de 1 à n et de même pour les rouges.

2. Puisque toutes les boules sont discernables, il faut en prendre sans ordre n parmi les $2n$ possibles. On obtient une combinaison :

$$\boxed{\binom{2n}{n} \text{ remplissages distincts de l'urne } A.}$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour mettre k boules vertes exactement, on choisit k boules vertes parmi les n possibles : $\binom{n}{k}$ possibilités (tirage simultané). On ajoute ensuite $n-k$ boules rouges parmi les n disponibles : $\binom{n}{n-k}$ possibilités. Or on a $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$. Donc Au total,

$$\boxed{\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2 \text{ remplissages possibles.}}$$

4. Soit R l'ensemble des remplissages possibles de l'urne A et R_k l'ensemble des remplissage de l'urne A avec exactement k boules vertes. On note que $(R_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ forme une partition de R :

$$R = \bigsqcup_{k \in [\![0;n]\!]} R_k.$$

Donc

$$\text{Card}\,(R) = \sum_{k=0}^{n} \text{Card}\,(R_k)\,.$$

Or par la question 2. $\text{Card}\,(R) = \binom{2n}{n}$ et par la question 3. $\text{Card}\,(R_k) = \binom{n}{k}^2$. Conclusion, on obtient la formule de Vandermonde suivante

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.}$$

5. On passe au complémentaire. Ne pas avoir une boule de chaque couleur c'est avoir un remplissage unicolore : deux façons, toutes les vertes ou toutes les rouges. Donc au final, on a

$$\boxed{\binom{2n}{n} - 2 \text{ remplissages avec au moins une boule de chaque couleur.}}$$

6. On choisit la boule de numéro 1 : deux choix, la boule 1 verte ou la boule 1 rouge. On complète alors par $n-1$ boules parmi les $2n-2$ boules de numéro entre 2 et n : $\binom{2n-2}{n-1}$ choix. Au total

$$\boxed{2\binom{2n-2}{n-1} \text{ remplissages avec une boule de numéro 1.}}$$

On considère pour toute la suite, $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini sur lequel toutes les variables aléatoires de ce problème seront définies.

On suppose à nouveau les boules de même couleur indiscernables. On remplit désormais les deux urnes de la façon suivante. On lance une pièce équilibrée à n reprises et on suppose les lancers indépendants. On note N le nombre de piles obtenus. On remplit alors l'urne A de N vertes et de $n-N$ rouges. Toutes les boules restantes vont dans l'urne B.

Une fois les urnes remplies, on procède de la façon suivante. A chaque étape, on pioche une boule dans chaque urne et on les échange. Ainsi chaque urne possède toujours à chaque étapes n boules. On pose $X_0 = N$ et on note pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k le nombre de boules vertes présente dans l'urne A à l'issue du/juste après le tirage k.

Partie 2 : Lois initiales

On note Y la variable aléatoire valant 1 si l'on a pioché une boule verte au premier tirage dans l'urne A et 0 sinon. Soit $p \in [\![0; n]\!]$.

7. On lance n fois une même pièce et les lancers sont indépendants. Donc N totalise le nombre de succès lors de la réalisation de n expériences identiques et indépendantes de Bernoulli de paramètre 1/2 (la pièce est équilibrée). Conclusion,

$$\boxed{N \text{ suit une loi binomiale de paramètre } n \text{ et } 1/2 : N \sim \mathscr{B}(n, 1/2).}$$

En particulier,

$$\boxed{\mathbb{P}(N=1) = \binom{n}{1}\frac{1}{2^1}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{n}{2^n}}$$

8. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $(X_k = p)$ est réalisé cela signifie que l'urne A contient p boules vertes. Or au total, l'urne A contient toujours n boules. Nécessairement, il a donc $n-p$ boules rouges dans l'urne A. Puisque p boules vertes sont dans l'urne A, les $n-p$ boules vertes restantes sont dans l'urne B. De même puisque $n-p$ boules rouges sont dans A, l'urne B contient les p boules rouges restantes. Conclusion, si $(X_k = p)$, à l'étape k,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{l'urne } A \text{ contient } p \text{ boules vertes, } n-p \text{ boules rouges} \\ \text{l'urne } B,\ n-p \text{ boules vertes et } p \text{ boules rouges.}\end{array}}$$

9. On cherche $\mathbb{P}(Y=1 \mid N=p)$. Si $N=p$ est réalisé, cela signifie que l'urne A est composée de p boules vertes et de $n-p$ boules rouges. On tire une boule de façon uniforme parmi ces n boules, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=1 \mid N=p) = \frac{p}{n}.}$$

10. On sait que $(N=p)_{p\in[\![0;n]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales,
$$\mathbb{P}(Y=1)=\sum_{p=0}^{n}\mathbb{P}(Y=1\mid N=p)\,\mathbb{P}(N=p).$$
Par la question 7. $N\sim\mathscr{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$. Donc $\mathbb{P}(N=p)=\binom{n}{p}\frac{1}{2^p}\frac{1}{2^{n-p}}=\binom{n}{p}\frac{1}{2^n}$. De plus, par la question précédente, $\mathbb{P}(Y=1\mid N=p)=\frac{p}{n}$. Ainsi,
$$\mathbb{P}(Y=1)=\sum_{p=0}^{n}\frac{p}{n}\binom{n}{p}\frac{1}{2^n}.$$
Conclusion, on obtient bien que
$$\boxed{\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\frac{p}{n}.}$$

11. Puisque $Y(\Omega)=\{0;1\}$, nécessairement, Y suit une loi de Bernoulli. Déterminons son paramètre : $\mathbb{P}(Y=1)$. Par la question précédente,
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=1)&=\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\frac{p}{n}\\
&=\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\frac{n!}{p!\,(n-p)!}\frac{p}{n}\\
&=\frac{1}{2^n}\sum_{p=1}^{n}\frac{n!}{p!\,(n-p)!}\frac{p}{n}+0\\
&=\frac{1}{2^n}\sum_{p=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!}\\
&=\frac{1}{2^n}\sum_{p=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-1-(p-1))!}\\
&=\frac{1}{2^n}\sum_{p=1}^{n}\binom{n-1}{p-1}\\
&=\frac{1}{2^n}\sum_{q=0}^{n-1}\binom{n-1}{q} && \text{en posant } q=p-1\\
&=\frac{1}{2^n}(1+1)^{n-1} && \text{car on reconnait la formule de Newton}\\
&=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{Y\sim\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$$
Ce résultat est cohérent, puisque la pièce est équilibrée, le remplissage de l'urne ne favorise pas plus les vertes que les rouges. On a donc autant de chance d'obtenir au premier tirage une verte qu'une rouge. *Cela ne veut pas dire que l'urne possède toujours autant de vertes que de rouges ni même que cela arrive souvent. Mais elle a autant de chances par exemple de n'avoir que des vertes que de n'avoir que des rouges ou de n'avoir qu'une seule verte qu'une seule rouge etc.*

12. On suppose dans cette question uniquement que n est pair. On sait que :

$$(Y=1) \text{ et } (N=p) \text{ sont indépendants} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbb{P}\left(Y=1 \mid N=p\right)=\mathbb{P}\left(Y=1\right).$$

Donc par les questions précédentes,

$$(Y=1) \text{ et } (N=p) \text{ sont indépendants} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{p}{n}=\frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad p=\frac{n}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{(Y=1) \text{ et } (N=p) \text{ sont indépendants} \qquad \Leftrightarrow \qquad p=\frac{n}{2}.}$$

Comme cela ne fonctionne pas pour TOUT $p \in [\![0;n]\!]$, nécessairement on dira que les variables aléatoires N et Y ne sont pas indépendantes.

13. On cherche $\mathbb{P}\left(N=n \mid Y=1\right)$ sachant que cette probabilité existe car $(Y=1)$ n'est pas négligeable (de probabilité $1/2 \neq 0$). Par la formule de Bayes car $\mathbb{P}\left(Y=1\right) \neq 0$,

$$\mathbb{P}\left(N=n \mid Y=1\right)=\frac{\mathbb{P}\left(Y=1 \mid N=n\right)\mathbb{P}\left(N=n\right)}{\mathbb{P}\left(Y=1\right)}.$$

Par la question 9. $\mathbb{P}\left(Y=1 \mid N=n\right)=\frac{n}{n}=1$. De plus, par la question 11. $\mathbb{P}\left(Y=1\right)=\frac{1}{2}$ et par la question 7. $\mathbb{P}\left(N=n\right)=\binom{n}{n}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(N=n \mid Y=1\right)=\frac{1 \times \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(N=n \mid Y=1\right)=\frac{1}{2^{n-1}}.}$$

C'est vrai que s'il on a pioché une verte, cela va favoriser les remplissages avec plus de vertes mais de là à favoriser la disposition qu'avec des vertes, c'est n'est pas évident. Cette probabilité reste faible du fait que n'avoir que des vertes est un évènement rare en absolue. Il est finalement plus courant d'obtenir une verte avec une urne contenant quelques rouges que d'avoir une verte issue d'une urne qu'avec des boules vertes.

Partie 3 : Le cas $n=2$

On suppose dans cette partie que $n=2$.
On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k=\mathbb{P}\left(X_k=0\right)$, $b_k=\mathbb{P}\left(X_k=1\right)$ et $c_k=\mathbb{P}\left(X_k=2\right)$.

14. Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisqu'il n'y a que deux boules vertes et deux boules rouges, on note que $X_k(\Omega)=[\![0;2]\!]$. Donc $(X_k=i)_{i\in[\![0;2]\!]}$ forme un système complet. Notamment,

$$\mathbb{P}\left(X_k=0\right)+\mathbb{P}\left(X_k=1\right)+\mathbb{P}\left(X_k=2\right)=1 \qquad \Leftrightarrow \qquad a_k+b_k+c_k=1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad a_k+b_k+c_k=1.}$$

15. Par hypothèse $X_0=N$. Donc par la question 7. $X_0 \sim \mathscr{B}\left(2,\frac{1}{2}\right)$. Ainsi,

$$a_0=\binom{2}{0}\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}, \qquad b_0=\binom{2}{1}\frac{1}{2^2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, \qquad c_0=\binom{2}{2}\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}.$$

On contrôle bien que $a_0+b_0+c_0=1$. Conclusion,

$$\boxed{a_0=c_0=\frac{1}{4} \text{ et } b_0=\frac{1}{2}.}$$

16. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $X_k = 0$, l'urne A possède donc deux boules rouges et donc l'urne B possède deux boules vertes. Nécessairement, on échangera une boule rouge de A contre une boule verte de B. On obtient donc $X_{k+1} = 1$. Ainsi,

$$\forall j \in [\![0;2]\!], \qquad \mathbb{P}\left(X_{k+1} = j \mid X_k = 0\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \in \{0;2\} \\ 1 \text{ si } j = 1 \end{cases}.$$

Si $X_k = 2$, l'urne A contient deux boules vertes et donc l'urne B possède deux boules rouges, de même on va nécessairement échanger une rouge contre une verte. Ainsi,

$$\forall j \in [\![0;2]\!], \qquad \mathbb{P}\left(X_{k+1} = j \mid X_k = 2\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \in \{0;2\} \\ 1 \text{ si } j = 1 \end{cases}.$$

Si $X_k = 1$, l'urne A et l'urne B possèdent chacune une boule rouge et une boule verte. On a alors quatre cas équiprobable :

(a) On échange les deux vertes,
(b) On échange les deux rouges,
(c) on échange la verte de A contre la rouge de B,
(d) on échange la rouge de A contre la verte de B.

Dans chaque cas, il faut piocher une boule dans A : probabilité $1/2$ et piocher une boule dans B : probabilité $1/2$. Les deux tirages sont indépendants, on obtient donc pour chaque échange une probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Voyons maintenant le résultat de chaque cas,

(a) $X_{k+1} = 1$, troquer une verte contre une autre verte ne change pas la composition de A,
(b) $X_{k+1} = 1$, même raisonnement pour les rouges,
(c) $X_{k+1} = 0$, on a perdu la verte et obtenu une rouge en échange,
(d) $X_{k+1} = 2$, on a perdu la rouge et obtenu une verte en échange.

Chaque cas arrivant avec une probabilité $\frac{1}{4}$, on en déduit que

$$\mathbb{P}\left(X_{k+1} = 0 \mid X_k = 1\right) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}\left(X_{k+1} = 2 \mid X_k = 1\right)$$

tandis que

$$\mathbb{P}\left(X_{k+1} = 1 \mid X_k = 1\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Conclusion, on résume les valeurs de $\mathbb{P}\left(X_{k+1} = j \mid X_k = i\right)$ dans le tableau suivant

$j \backslash i$	0	1	2
0	0	$\frac{1}{4}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1
2	0	$\frac{1}{4}$	0

17. Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait que $(X_k = i)_{i \in [\![0;2]\!]}$ forme un système complet d'évènements. Donc par la formule des probabilités totales :

$$a_{k+1} = \mathbb{P}\left(X_{k+1} = 0\right) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}\left(X_{k+1} = 0 \mid X_k = i\right) \mathbb{P}\left(X_k = i\right).$$

Par la question précédente,

$$a_{k+1} = 0 + \frac{1}{4} \times \mathbb{P}(X_k = 1) + 0 = \frac{a_k}{4}.$$

De même,

$$\begin{aligned} b_{k+1} = \mathbb{P}(X_{k+1} = 1) &= \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(X_{k+1} = 1 \mid X_k = i)\,\mathbb{P}(X_k = i) \\ &= 1 \times \mathbb{P}(X_k = 0) + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(X_k = 1) + 1 \times \mathbb{P}(X_k = 2) \qquad = a_k + \frac{b_k}{2} + c_k. \end{aligned}$$

Enfin,

$$c_{k+1} = 0 + \frac{b_k}{4} + 0.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{k+1} = \frac{b_k}{4} \\ b_{k+1} = a_k + \frac{b_k}{2} + c_k \\ c_{k+1} = \frac{b_k}{4} \end{cases}.}$$

18. *Méthode 1.*

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Par la question précédente,

$$b_{k+2} = a_{k+1} + \frac{b_{k+1}}{2} + c_{k+1}.$$

De plus, $a_{k+1} = c_{k+1} = \frac{b_k}{4}$. Donc

$$b_{k+2} = \frac{b_k}{4} + \frac{b_{k+1}}{2} + \frac{b_k}{4} = \frac{b_{k+1} + b_k}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad b_{k+2} = \frac{b_{k+1} + b_k}{2}.}$$

(b) Par la question précédente, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - \frac{r}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

dont le discriminant est $\Delta = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$. Donc les racines associées sont $r_1 = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$. Donc

$$\exists\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\ \forall k \in \mathbb{N}, \qquad b_k = \lambda\, 1^k + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^k.$$

Or, on a vu que $b_0 = \frac{1}{2}$ et par la question 17., $b_1 = a_0 + \frac{b_0}{2} + c_0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Donc

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda + \mu = \frac{1}{2} \\ \lambda - \frac{\mu}{2} = \frac{3}{4} \end{cases} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda + \mu = \frac{1}{2} \\ -3\frac{\mu}{2} = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} - \mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \\ \mu = -\frac{1}{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad b_k = \frac{2}{3} - \frac{(-1/2)^k}{6}.$$

Puis,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad a_k = c_k = \frac{b_{k-1}}{4} = \frac{1}{6} - \frac{(-1/2)^{k-1}}{24} = \frac{1}{6} + \frac{(-1/2)^k}{12}.$$

Si $k = 0$, on observe que $\frac{1}{6} + \frac{(-1/2)^k}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4} = a_0 = c_0$ et la formule reste vraie. Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad b_k = \frac{2}{3} - \frac{(-1/2)^k}{6} \quad \text{et} \quad a_k = c_k = \frac{1}{6} + \frac{(-1/2)^k}{12}.}$$

19. *Méthode 2.*

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On rappelle que $b_{k+1} = a_k + \frac{b_k}{2} + c_k$. Or puisque $(X_k = i)_{i \in [\![0;2]\!]}$ forme un système complet, on sait que $a_k + b_k + c_k = 1$ i.e. $a_k + c_k = 1 - b_k$. D'où

$$b_{k+1} = 1 - b_k + \frac{b_k}{2} = 1 - \frac{b_k}{2}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad b_{k+1} = 1 - \frac{b_k}{2}.}$$

(b) On reconnait cette fois une suite arithmético-géométrique. Soit $\omega \in \mathbb{R}$, on a

$$\omega = 1 - \frac{\omega}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{3\,\omega}{2} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \omega = \frac{2}{3}.$$

Fixons $\omega = \frac{2}{3}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_k = b_k - \omega$. On observe alors que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad d_{k+1} = b_{k+1} - \omega = 1 - \frac{b_k}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{b_k}{2} = -\frac{1}{2}\left(b_k - \frac{2}{3}\right) = -\frac{d_k}{2}.$$

Donc la suite $(d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad d_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k d_0 = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(b_0 - \frac{2}{3}\right).$$

Or on a vu que $b_0 = \frac{1}{2}$. Donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad b_k = d_k + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(b_0 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{(-1/2)^k}{6}$$

On retrouve bien la valeur de b_k. Puis de même que précédemment, on retrouve les valeurs de a_k et c_k. Conclusion, on obtient à nouveau que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad b_k = \frac{2}{3} - \frac{(-1/2)^k}{6} \quad \text{et} \quad a_k = c_k = \frac{1}{6} + \frac{(-1/2)^k}{12}.}$$

20. Puisque $-1 < -\frac{1}{2} < 1$, on obtient $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{k \to +\infty} b_k = \dfrac{2}{3} + 0$. De même pour $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} b_k = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad \lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} b_k = \frac{1}{6}.}$$

Bien sûr vous aviez repéré que nous étions en présence d'une chaîne de Markov à trois états : 0, 1 et 2. Elle converge donc géométriquement vers une « mesure invariante » qui est donnée par les probabilités asymptotiques ci-dessus. En temps long, on a deux chance sur trois que l'urne A possède une boule verte et une boule rouge, une chance sur six qu'elle possède deux boules vertes et une chance sur six qu'elle possède deux boules rouges. Ces probabilités ne dépendent pas en réalité de la loi de X_0.

Partie 4 : Un petit pois dans un champ de betteraves

On reprend $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Soit $k \in \mathbb{N}$. On note U_k l'évènement : « l'urne A n'a eu qu'une seule boule verte du début jusqu'à l'étape k (incluse) ».

21. Pour réaliser U_k il faut qu'à chaque étape entre 0 et k, l'urne A contienne exactement une boule verte i.e. $X_i = 1$ soit réalisé. Donc

$$\boxed{U_k = \bigcap_{i=0}^{k} (X_i = 1)\,.}$$

22. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On suppose U_i réalisé. On effectue le tirage $i+1$ dans chaque urne.

    (a) Si U_i est réalisé, alors $(X_i = 1)$ est vérifié et donc l'urne A contient 1 boule verte et $n-1$ boules rouges. Le tirage étant uniforme parmi les boules de A, la probabilité d'obtenir une boule verte dans A est de $1/n$. Tandis que l'urne B contient $n-1$ boules vertes et une seule boule rouge. La probabilité d'obtenir une boule verte est donc de $\frac{n-1}{n}$. Les deux tirages étant indépendants, on obtient

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{n} \times \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n^2}.}$$

    (b) Toujours sous $(X_i = 1)$, l'urne A contient $n-1$ boules rouges et l'urne B une seule boule rouge. Donc de même

$$\boxed{\beta = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n^2}.}$$

    (c) Sachant U_i réalisé, une seule boule verte est dans l'urne A. Pour garder ensuite la même disposition, il faut ou échanger une boule verte contre une autre boule verte ou échanger une boule rouge contre une autre boule rouge. Ces deux évènements sont disjoints et les probabilités correspondent respectivement aux questions 22.a et 22.b respectivement. On obtient donc

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}, \qquad \mathbb{P}\left(X_{i+1} = 1 \mid U_i \right) = \alpha + \beta = 2\frac{n-1}{n^2}.}$$

23. Par la question 21.

$$U_k = \bigcap_{i=0}^{k} (X_i = 1)\,.$$

Donc par la formule des probabilités composées, si $k \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(U_k) = \left[\prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}\left(X_{i+1} = 1 \,\middle|\, \bigcap_{j=0}^{i} (X_j = 1) \right)\right] \mathbb{P}(X_0 = 1) = \left[\prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{P}\left(X_{i+1} = 1 \mid U_i \right)\right] \mathbb{P}(X_0 = 1)\,.$$

Par la question précédente, pour tout $i \in [\![0; k-1]\!]$, $\mathbb{P}\left(X_{i+1} = 1 \mid U_i \right) = \frac{2(n-1)}{n^2}$. D'autre part, $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \binom{n}{1}\frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^n}$. D'où

$$\mathbb{P}(U_k) = \left[\prod_{i=0}^{k-1} \frac{2(n-1)}{n^2}\right] \frac{n}{2^n} = \frac{2^k (n-1)^k}{n^{2k}} \frac{n}{2^n} = \frac{(n-1)^k}{n^{2k-1} 2^{n-k}}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}(U_k) = \frac{(n-1)^k}{n^{2k-1} 2^{n-k}}.}$$